

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



في الرياضيات



الاعداد المركبة

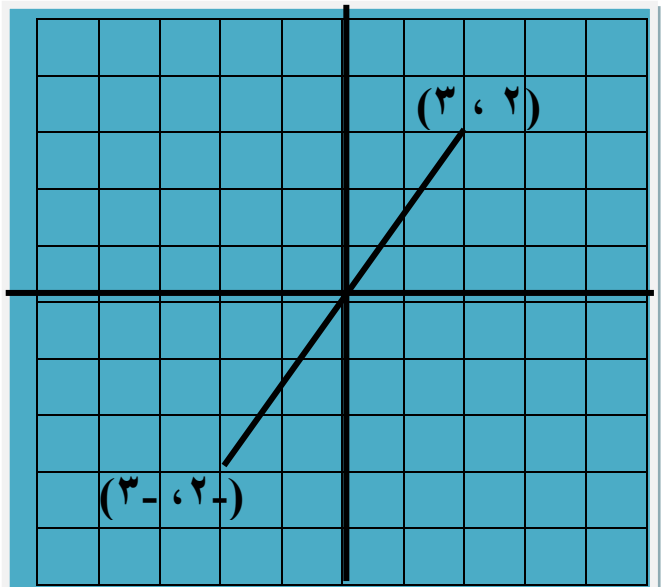
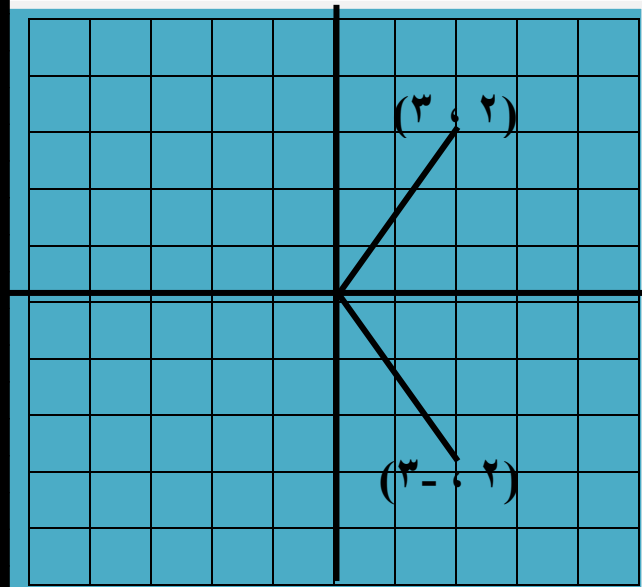


التمثيل البياني للأعداد المركبة – شكل أرقد

فكر العالم أرقد في تمثيل العدد المركب $ع = س + ت$ ص بيانيا بقطعة مستقيمة طرفها نقطة الاصل والطرف الاخر النقطة $(س، ص)$ فمثلا العدد $٣ + ٢$ ت تمثله قطعة مستقيمة طرفها نقطة الاصل والنقطة $(٣، ٢)$ ملاحظات:

(٢) العددان المركبان المترافقان يمثلان بيانيا بنقطتين متماثلتين بالنسبة لمحور السينات

(١) العدد المركب ومعكوسه الجمعي يمثلان بيانيا بطرفي قطعة مستقيمة تكون نقطة الاصل في منتصفها



المقياس والزاوية للعدد المركب

العدد المركب $ع = س + ت$ ص تمثله النقطة $(س، ص)$

مقياس العدد المركب :-

هو طول القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطة الاصل والنقطة $(س، ص)$ ويعطى من

$$العلاقة \quad |ع| = ر = \sqrt{س^2 + ص^2} \quad \text{مقياسه} \quad ر = \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$$

سعة العدد المركب :-

هي قياس الزاوية المحصورة بين القطعة المستقيمة الممتدة للعدد المركب والاتجاه

الموجب لمحور السينات وتتعين من العلاقتين

$$\text{جته} = \frac{س}{ر}, \quad \text{جاه} = \frac{ص}{ر}$$

الصورة المثلثية (القطبية) للعدد المركب

العدد $ع = س + ت ص$ (الصورة الديكارتية) يمكن كتابته على صورة أخرى تسمى الصورة المثلثية (القطبية) بدلالة المقياس والزاوية) وهى :

$$ع = ر (جتا ه + ت جا ه) \text{ حيث } ر (\text{مقياس العدد}) , ه (\text{سعة العدد})$$

ملاحظات :

(١) العدد $ع = ١$ تمثله النقطة (١ ، ٠) الموجودة على محور السينات

مقياسه = ١ ، سعته = ٠ الصورة المثلثية له هى $ع = جتا ٠ + ت جا ٠$

(٢) العدد $ع = ت$ تمثله النقطة (٠ ، ١) الموجودة على محور الصادات

مقياسه = ١ سعته = ٩٠ الصورة المثلثية له هى $ع = جتا ٩٠ + ت جا ٩٠$

(٣) العدد $ع = ١ -$ تمثله النقطة (٠ ، ١ -) الموجودة على الجزء السالب لمحور السينات

مقياسه = ١ سعته = ١٨٠ الصورة المثلثية له $ع = جتا ١٨٠ + ت جا ١٨٠$

(٤) العدد $ع = - ت$ تمثله النقطة (٠ ، ١ -) الموجودة على الجزء السالب لمحور الصادات

مقياسه = ١ سعته = ٢٧٠ الصورة المثلثية له هى $ع = جتا ٢٧٠ + ت جا ٢٧٠$

$$\begin{aligned} ١ &= جتا ٠ + ت جا ٠ , & ت &= جتا ٩٠ + ت جا ٩٠ , \\ ١ - &= جتا ١٨٠ + ت جا ١٨٠ , & - ت &= جتا ٢٧٠ + ت جا ٢٧٠ , \end{aligned}$$

بعض الاعداد يمكن إيجاد المقياس والسعة له بسهولة فمثلا

$$\text{العدد } ع = ٥ = ١ \times ٥ = ٥ (جتا ٠ + ت جا ٠) \text{ [مقياسه } ٥ = \text{ سعته } ٠]}$$

$$\text{العدد } ع = ٥ - = ٥ \times ١ - = ٥ (جتا ١٨٠ + ت جا ١٨٠) \text{ [مقياسه } ٥ = \text{ سعته } ١٨٠]}$$

$$\text{العدد } ع = ٥ ت = ٥ \times ت = ٥ (جتا ٩٠ + ت جا ٩٠) \text{ [مقياسه } ٥ = \text{ سعته } ٩٠]}$$

$$\text{العدد } ع = ٥ - ت = ٥ \times - ت = ٥ (جتا ٢٧٠ + ت جا ٢٧٠) \text{ [مقياسه } ٥ = \text{ سعته } ٢٧٠]}$$

مثال

المثلثية

أوجد المقياس والسعة لكلا من الأعداد المركبة الآتية ثم ضع كلا منها على الصورة

$$(1) \quad 1 + i = e^{i\theta}$$

الحل

$$1 = \cos \theta, \quad 1 = \sin \theta$$

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \theta, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \theta$$

$$\theta = 45^\circ$$

$$e^{i\theta} = \sqrt{2} (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$$

$$(3) \quad 1 + i\sqrt{3} = e^{i\theta}$$

الحل

$$1 = \cos \theta, \quad \sqrt{3} = \sin \theta$$

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\frac{1}{2} = \cos \theta, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \theta$$

$$\theta = 60^\circ$$

$$e^{i\theta} = 2 (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$$

$$(2) \quad 1 - i = e^{i\theta}$$

الحل

$$1 = \cos \theta, \quad -1 = \sin \theta$$

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \theta, \quad \frac{-1}{\sqrt{2}} = \sin \theta$$

$$\theta = 315^\circ$$

$$e^{i\theta} = \sqrt{2} (\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$$

$$(5) \quad 1 - i\sqrt{3} = e^{i\theta}$$

الحل

$$1 = \cos \theta, \quad -\sqrt{3} = \sin \theta$$

$$r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\frac{1}{2} = \cos \theta, \quad \frac{-\sqrt{3}}{2} = \sin \theta$$

$$\theta = 300^\circ$$

$$e^{i\theta} = 2 (\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$$

$$(3) \quad 1 - i + i\sqrt{3} = e^{i\theta}$$

الحل

$$1 = \cos \theta, \quad -1 + \sqrt{3} = \sin \theta$$

$$r = \sqrt{1^2 + (-1 + \sqrt{3})^2} = 2$$

$$\frac{1}{2} = \cos \theta, \quad \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} = \sin \theta$$

$$\theta = 135^\circ$$

$$e^{i\theta} = 2 (\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$$

$$(6) \quad 1 - i\sqrt{3} = e^{i\theta}$$

الحل

$$1 = \cos \theta, \quad -\sqrt{3} = \sin \theta$$

$$r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\frac{1}{2} = \cos \theta, \quad \frac{-\sqrt{3}}{2} = \sin \theta$$

$$\theta = 330^\circ$$

$$e^{i\theta} = 2 (\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)$$

أوجد المقياس والزاوية لكلا من الاعداد الآتية

مثال

$$(١) \quad ٣ = ع \quad (٦٠ جتا + ٦٠ ت جا)$$

~~الحل~~
المقياس = ٣ الزاوية = ٦٠

بعض خواص الصورة القطبية

إذا كان :

$١ع = [١هـ , ١ر] , ٢ع = [٢هـ , ٢ر]$
عدين مركبين ، أ عدد حقيقي فان :

$$① \quad ١ع + ٢ع = [١هـ + ٢هـ , ١ر + ٢ر]$$

$$② \quad ١ع \div ٢ع = [١هـ \div ٢هـ , ١ر \div ٢ر]$$

$$③ \quad [١هـ , ١ر] = ١ع$$

$$④ \quad [١هـ , ١ر] = ١ع - \pi$$

$$⑤ \quad [١هـ , \frac{1}{١ر}] = \frac{1}{١ع}$$

$$⑥ \quad [١هـ , ١ر] = ١ع$$

$$(٢) \quad ٥ = ع \quad (٦٠ جتا - ٦٠ ت جا)$$

~~الحل~~
يجب تعديل الزاوية

$$٥ = ع \quad (٣٠٠ جتا + ٣٠٠ ت جا)$$

المقياس = ٥ الزاوية = ٣٠٠

اكتب العدد : $٢ - ٢ = ع$
بالصورة القطبية ، ثم مثله
علي شكل ارقاند؟

مثال

~~الحل~~

$$(٦) \quad ٧ = ع \quad (٦٠ جتا - ٦٠ ت جا)$$

~~الحل~~
 $٧ = ع \quad (٣٣٠ جتا + ٣٣٠ ت جا)$

المقياس = ٧ الزاوية = ٣٣٠

$$(٥) \quad ٢ = ع \quad (٦٠ جتا + ٦٠ ت جا)$$

~~الحل~~
يجب تعديل الزاوية

$$٢ = ع \quad (٣٠ جتا + ٣٠ ت جا)$$

المقياس = ٢ الزاوية = ٣٠

مثال

ضع العدد المركب
ع = [٣٣٠ ، ١٠]
في الصورة الديكارتية

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال

إذا كان : $ع = ٢ + ٣\sqrt{٢}$
اكتب كل من الاعداد الاتية في
الصورة القطبية:

ع ①

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ع ②

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ع ②

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

نظرية ديموافر

إذا كانت $E = R(\text{جناه} + \text{تجاه})$ فإن :

$$E^N = [R(\text{جناه} + \text{تجاه})]^N = R^N(\text{جناه} + \text{تجاه})$$

اثبت ان : $1 = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) = 1$

مثال

جد : E^A في صورة $A + B$

~~الحل~~

إذا كان : $E = R(\text{جناه} + \text{تجاه})$ جد : E^A في صورة $A + B$

مثال

~~الحل~~

إذا كان : $E = R(\text{جناه} + \text{تجاه})$ جد : E^A في صورة $A + B$

مثال

~~الحل~~

جزور الاعداد المركبة

اولاً: الجذور التربيعية للاعداد المركبة

اوجد الجذرين التربيعيين للعدد : $3 + 4i$

مثال

~~الحل~~

ثانياً: الجذور النونية للاعداد المركبة

$$\epsilon^n = \epsilon^{\frac{1}{n}} \left[\cos \left(\frac{2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi k}{n} \right) \right]$$

حيث $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ الى $n - 1$

جد جزور المعادلة : $\epsilon^6 = 1$

مثال

~~الحل~~

حاول ان تحل

① اذا كان العدد $\epsilon = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، مستخدماً نظرية دي موافر اثبت ان : $\epsilon^6 = 1$

$\frac{1}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

القوى (نظرية ديموافر)

لإيجاد قوى أي عدد مركب نستخدم مبرهنة دي موافر

مېرهنة دى موافر

إذا كان $e = [r, h] = r$ (جٲاھ + ت جاھ) ، و كانت $n \ni v$ فبان :

$$[ن ه, ر] = (جتان ه + ت جان ه) ر = ن (جتا ه + ت جا ه) ر = ع ر$$

مثال (١) إذا كان $E = [3, 50]$ أوجد E^* بالصورة $[r, h]$

$$[\overset{\circ}{r} \dots, 729] = [\overset{\circ}{o} \times 6, 73] = {}^7([\overset{\circ}{o} \dots, 3]) = {}^7\varepsilon$$

مثال (٢) إذا كان $[^0\epsilon, \epsilon] = \epsilon$ ، $[^0\gamma, \gamma] = \epsilon$ أوجد قيمة

(٤) $\div$ ع بالصورة القطبية

الحل :

$$[\overset{o}{1}2, 64] = [\overset{o}{4} \times 3, 4] = 3[\overset{o}{4}, 4] = 3(\mathcal{E})$$

$$[0.32] = [7.2] \div [12.64] = .\mathcal{E} \div {}^r(. \mathcal{E})$$

مثال (٣) إذا كان $E = \frac{1}{2} - 1$ فأوجد E' بالصورتين الجبرية والقطبية؟

الحل :

أولاً نضع العدد المركب في صورة قياسية كالتالي:

$$1 - \frac{1}{1} = 1 - 1 = 1 - \frac{1}{1} = 1 - \frac{1}{1} = 1 - \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1 - \frac{1}{1} = \varepsilon$$

$$\boxed{\therefore \varepsilon = 1 - \tau}$$

يمكن إيجاد ع^{١٠} بالصورة القطبية كالتالي: نحول العدد ع إلى الصورة القطبية (تحويل سريع) كالتالي:

$$\therefore |s| = |ص| ، ص سالبة ، ص سالبة \Leftarrow ه = ٢٢٥ ، ر = \sqrt[3]{٢}$$

$$\therefore [٢٢٥ ، \sqrt[3]{٢}] = ع$$

$$[٢٢٥٠ ، ٣٢] = [٢٢٥ \times ١٠ ، '(\sqrt[3]{٢})] = '([٢٢٥ ، \sqrt[3]{٢}]) = 'ع$$

$$ع' = [٩٠ ، ٣٢] = ٣٢ ت$$

مثال (٤) أوجد قيمة $\sqrt[6]{\left(\frac{\sqrt[3]{٣} - ١}{\sqrt[3]{٣} + ١}\right)}$ بالصورتين الجبرية والقطبية

الحل

نحول العددين $(\sqrt[3]{٣} - ١)$ ، $(\sqrt[3]{٣} + ١)$ تحويلاً سريعاً بالشكل التالي:

$$\sqrt[3]{٣} - ١ = \left(\frac{\sqrt[3]{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}\right)^٢ = ٢ = (٢٠ جتا + ٢٠ جا) = [٢٠٠ ، ٢]$$

$$\sqrt[3]{٣} + ١ = \left(\frac{\sqrt[3]{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}\right)^٢ = ٢ = (٢٠ جتا + ٢٠ جا) = [٦٠ ، ٢]$$

$$[٢٤٠ ، ١] = [٦٠ - ٢٠٠ ، \frac{٢}{٢}] = \frac{[٢٠٠ ، ٢]}{[٦٠ ، ٢]} = \frac{\sqrt[3]{٣} - ١}{\sqrt[3]{٣} + ١}$$

$$[١٤٤٠ ، ١] = [٢٤٠ \times ٦ ، ١] = '([٢٤٠ ، ١]) = \sqrt[6]{\left(\frac{\sqrt[3]{٣} - ١}{\sqrt[3]{٣} + ١}\right)}$$

وحيث أن $١٤٤٠ = ٨ + ٠ \pi$ (القياس الاساسي للزاوية ١٤٤٠ يساوي صفر)

$$[٠ ، ١] = [١٤٤٠ ، ١]$$

$$[٠ ، ١] = \text{قيمة المقدار} \sqrt[6]{\left(\frac{\sqrt[3]{٣} - ١}{\sqrt[3]{٣} + ١}\right)} \text{ بالصورة القطبية}$$

$$\therefore \text{قيمة المقدار} \sqrt[6]{\left(\frac{\sqrt[3]{٣} - ١}{\sqrt[3]{٣} + ١}\right)} \text{ بالصورة الجبرية} = ١$$

أوجد مقياس وسعة العدد:

مثال ①

$$^6 \left[\left(\frac{\pi}{12} \text{ جتا } + \frac{\pi}{12} \text{ جا } \right)^2 \right]$$

الحل

أوجد مقياس وسعة العدد:

مثال ②

$$^8 \left(\frac{\sqrt[3]{2} \text{ ت}}{\text{ت} + 1} \right)$$

الحل

أوجد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد المركب $(-1 + \sqrt[3]{3} \text{ ت})^3$

مثال ③

الحل

مثال (٤) عبر عن جتا ٢ هـ ، جا ٢ هـ بدلالة جا هـ ، جتا هـ باستخدام نظرية ديموافر

الحل

باستخدام نظرية ديموافر اوجد ناتج مايلي في ابسط صورة:

$$[٢ (جتا ١٥ + ت جا ١٥)]^٣$$

مثال (٥)

الحل

باستخدام نظرية ديموافر اوجد ناتج مايلي في ابسط صورة:

$$[\sqrt{٢} (جتا ٣٠ + ت جا ٣٠)]^٤$$

مثال (٦)

الحل

بإستخدام نظريه ديموافر اوجد ناتج مايلي في ابسط صورة:

$$(1 + t)^6$$

مثال ٧

الحل

بسط كلاً مما يأتي:

$$\frac{(ج ت هـ - ت ج هـ)^2}{(ج ت هـ - ت ج هـ)^3}$$

مثال ٨

الحل

بسط كلاً مما يأتي:

$$\frac{(ج ت هـ - ت ج هـ)^2}{(ج ت هـ - ت ج هـ)^3}$$

مثال ٩

الحل

إذا كان : ع = ٢٧ (جتاه ١ + تجاه ١)
جد : ع^١ في صورة أ + ب ت

مثال ١٠

الحل

إذا كان : ع = ١ - + ت
جد : ع^١ في صورة أ + ب ت

مثال ١١

الحل

إذا كان : ع = ١ - + ت
جد : ع^١ في صورة أ + ب ت

مثال ١٢

الحل

١ إذا كان $\frac{2+t}{t-3} = \text{ع}$ أوجد ع^2 ، $\frac{1}{\text{ع}^3}$ بالصورة $[ر، هـ]$

الحل: $\text{ع}^2 = [\frac{\pi^3}{2}, 2]$ ، $\frac{1}{\text{ع}^3} = [\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\pi^9}{4}]$

٢ إذا علمت أن $\text{ع} = 2 + \sqrt[3]{2}$ أوجد ع^3

$[\frac{\pi^5}{3}, 1024] = \text{ع}^3$

٣ أثبت أن: $\left(\frac{t - \sqrt[3]{t}}{t\sqrt[3]{t} + 1} \right)^9 = -t$

٤ بسط المقدار: $\frac{(\text{جناه} - \text{ت جاه})}{(\text{جناه} + \text{ت جاه})}$ الحل: $[1, 5 - هـ]$

٥ إذا كان: $\sqrt[3]{\text{ع}} = 3 - \sqrt[3]{t}$ ، $\frac{1}{\text{ع}} = -t$ أوجد: $(\text{ع})^4$

٦ إذا كان: $\text{ع} = [1, هـ]$ برهن أن $\text{ع}^2 - \frac{1}{\text{ع}} = \text{جناه جاه}$

٧ إذا علمت أن: $\text{ع} = [1, \frac{\pi}{3}]$ برهن أن $(\text{ع} + \frac{1}{\text{ع}})^2 = 1$

٨ إذا كان $\text{ع} = \text{جناه} + \text{ت جاه}$ ، $\frac{\text{ع} + 1}{\text{ع} - 1} = \text{ع}$ أثبت أن $\text{ع} = \text{ت ظنا} (\frac{\text{هـ}}{\text{ر}})$

٩ أوجد مقياس وسعة $(1 + \text{جناه} + \text{ت جاه})^n$ الحل: المقياس $= 2^n \text{جناه}^{\frac{\text{هـ}}{\text{ر}}}$ ، السعة $= \frac{n \text{هـ}}{\text{ر}}$

١٠ ليكن $\text{ع} = 2 \text{جا}^2 \text{هـ} + \text{ت جاه}^2$ ، $\text{ع} = \text{جا}^2 \text{هـ} - (1 - \text{جناه}^2) \text{ت}$ ، $0 < \text{هـ} < \frac{\pi}{2}$

أثبت أن: $(\text{ع} + \frac{1}{\text{ع}})^2 = 16$

١١ استخدم مبرهنة دي موافر للتعبير بدلالة جاس ، جتاس عن كلاً من: جتاس³ س ، جاس³ س

العمليات في الصورة القطبية

أولاً / الضرب

إذا كان ${}_1ع = [{}_1هـ, {}_1ر]$ ، ${}_٢ع = [{}_٢هـ, {}_٢ر]$ فإن :

$$[{}_٢هـ + {}_١هـ, {}_٢ر \times {}_١ر] = {}_٢ع \cdot {}_١ع$$

مثال : ليكن ${}_١ع = [{}^\circ ٥٠, ٣]$ ، ${}_٢ع = [{}^\circ ٣٠, ٢]$ أوجد ${}_٢ع \cdot {}_١ع$

$$\text{الحل : } {}_٢ع \cdot {}_١ع = [{}^\circ ٣٠ + {}^\circ ٥٠, ٢ \times ٣] = [{}^\circ ٨٠, ٦]$$

ثانياً / القسمة

إذا كان ${}_١ع = [{}_١هـ, {}_١ر]$ ، ${}_٢ع = [{}_٢هـ, {}_٢ر]$ فإن :

$$[{}_٢هـ - {}_١هـ, {}_٢ر \div {}_١ر] = \frac{{}_٢ع}{{}_١ع} = {}_٢ع \div {}_١ع$$

مثال : ليكن ${}_١ع = [{}^\circ ١٥٠, ١٠]$ ، ${}_٢ع = [{}^\circ ٣٠, ٢]$ أوجد ${}_٢ع \div {}_١ع$

$$\text{الحل : } {}_٢ع \div {}_١ع = [{}^\circ ٣٠ - {}^\circ ١٥٠, ٢ \div ١٠] = [{}^\circ ١٢٠, ٥]$$

بالنسبة للجمع والطرح :

لا يمكن إجراء عمليتي الجمع أو الطرح للأعداد المركبة في الصورة القطبية لذلك نقوم بتحويلها إلى الصورة الجبرية ثم نجري عملية الجمع أو الطرح ثم نقوم بتحويل الناتج إلى الصورة القطبية.

مثال : ليكن ${}_١ع = [{}^\circ ٤٥, \sqrt{٢}]$ ، ${}_٢ع = [{}^\circ ١٨٠, ٤]$ أوجد في الصورة القطبية ${}_٢ع + {}_١ع$

الحل : نحول العددين إلى الصورة الجبرية كنالي :

$${}_١ع = [{}^\circ ٤٥, \sqrt{٢}] \quad (\text{تحويل سريع لأن } {}^\circ ٤٥ = هـ) \quad \Leftarrow {}_١ع = ٢ + ٢ت$$

$${}_٢ع = [{}^\circ ١٨٠, ٤] \quad (\text{تحويل سريع لأن الزاوية محورية}) \quad \Leftarrow {}_٢ع = ٤ -$$

$$\therefore {}_١ع + {}_٢ع = ٢ + ٢ت + ٤ - = (٤ -) + ٢ت + ٢ت \quad \text{ولتحويل الناتج إلى الصورة القطبية نلاحظ أن}$$

$|س| = |ص|$ و بالتالي سنستخدم التحويل السريع فيكون :

$$- ٢ت + ٢ت = [{}^\circ ١٣٥, \sqrt{٢}] \quad (\text{هـ في الربع الثاني لأن س سالبة و ص موجبة})$$

النظير الجمعي والمرافق والمعكوس الضربي في الصورة القطبية:

١) النظير الجمعي (- ع) :

ليكن $ع = [ر، هـ]$ $ر = (جَته + ت جاه)$ فإن :

$ع - = ر - (جَته + ت جاه) = ر - (جَته - ت جاه)$ جتا، جاسالبان $\therefore$ نستخدم $(هـ + ١٨٠)$

$$ع - = ر - (جَته + ت جاه) = ر - (جَته + ت جا(هـ + ١٨٠)) \iff [ر، هـ + ١٨٠] = ع -$$

أي أن $ع - = [ر، هـ + ١٨٠]$ وهذا يعني أن :

للعدد المركب ونظيره الجمعي نفس المقياس و تزيد سعة النظير الجمعي بمقدار ١٨٠° .

مثال : ليكن $ع = [٧، ٤٥^\circ]$ أوجد $ع -$

$$\text{الحل: } ع - = [٧، ٤٥^\circ + ١٨٠^\circ] = [٧، ٢٢٥^\circ]$$

٢) المرافق ($\bar{ع}$) :

ليكن $ع = [ر، هـ]$ $ر = (جَته + ت جاه)$ فإن :

$\bar{ع} = ر - (جَته - ت جاه)$ جتا موجبة، جاسالبة $\therefore$ نستخدم $(- هـ)$

$$\bar{ع} = ر - (جَته - ت جاه) = ر - (جَته - ت جا(- هـ)) \iff [\bar{ع}، - هـ] = ر$$

وهذا يعني أن للعدد المركب $ع$ ومرافقه $\bar{ع}$ نفس المقياس ويختلفان في إشارة السعة.

كما نعلم أن $(- هـ) = ٣٦٠ - هـ$ $\therefore$ يمكن كتابة $\bar{ع}$ بالصورة :

$$\bar{ع} = [ر، ٣٦٠ - هـ] = ر - (جَته - ت جا(٣٦٠ - هـ))$$

مثال : ليكن $ع = [٣، ٦٠^\circ]$ أوجد $\bar{ع}$

$$\bar{ع} = [٣، ٦٠ - ٣٦٠^\circ] = [٣، -٣٠٠^\circ] \text{ أو } \bar{ع} = [٣، ٦٠ - ٣٦٠^\circ] = [٣، -٣٠٠^\circ]$$

ج) النظير الضربي (المعكوس) (ع⁻¹):

ليكن $ع = [ر، هـ]$ (جتاه + ت جاه) فإن:

$$ع^{-1} = \frac{1}{ع} = \frac{[٠، ١]}{[ر، هـ]} = \left[\frac{١}{ر}، -\frac{هـ}{ر} \right] = \left[\frac{١}{ر}، -٠، هـ \right] = \left[\frac{١}{ر}، -٠، هـ + ت + ت - هـ \right] = \left[\frac{١}{ر}، -٠، هـ + ت - هـ \right]$$

أي أن مقياس النظير الضربي للعدد المركب هو $\frac{1}{ر}$ وسعته هي $- هـ$

كما نعلم أن $(- هـ) = ٣٦٠^\circ - هـ$ ∴ يمكن كتابة ع⁻¹ بالصورة:

$$ع^{-1} = \left[\frac{١}{ر}، ٣٦٠^\circ - هـ \right] = \left[\frac{١}{ر}، -٣٦٠^\circ + هـ \right] = \left[\frac{١}{ر}، -٣٦٠^\circ + هـ + ت + ت - هـ \right]$$

مثال: ليكن $ع = [٣، ٦٠^\circ]$ جد ع⁻¹

$$ع^{-1} = \left[\frac{١}{٣}، -٦٠^\circ \right]$$

الخلاصة: إذا كان $ع = [ر، هـ]$ فإن:

$$ع^{-} = [ر، ١٨٠^\circ + هـ]، \quad ع^{-} = [ر، هـ]، \quad ع^{-1} = \left[\frac{١}{ر}، - هـ \right]$$

ملاحظات هامة:

(١) يكون العددان $ع_١ = [ر_١، هـ_١]$ ، $ع_٢ = [ر_٢، هـ_٢]$ متساويين إذا كان لهما نفس المقياس ولهما

نفس السعة أي إذا كان: $ر_١ = ر_٢$ ، $هـ_١ = هـ_٢ + ٢ ك \pi$

$$\text{مثال: } [٢، ٦٠^\circ] = [٢، ٦٠^\circ] ، \text{ كذلك } [٢، ٦٠^\circ] = [٢، ٤٢٠^\circ]$$

(٢) يكون العددان $ع_١ = [ر_١، هـ_١]$ ، $ع_٢ = [ر_٢، هـ_٢]$ مترافقين إذا كان لهما نفس المقياس ولهما

نفس السعة بإشارة مخالفة أي إذا كان: $ر_١ = ر_٢$ ، $هـ_١ = - هـ_٢ + ٢ ك \pi$

مثال: لاحظ أن النظير الجمعي للعدد المركب $[٢، ٣٠^\circ]$ هو $[٢، -٣٠^\circ]$ أو $[٢، -١٤٧٠^\circ]$

لأن $[٢، -٣٠^\circ] = [٢، -١٤٧٠^\circ]$ حيث: $-١٤٧٠^\circ = ٣٠^\circ + (-٤) \times ٣٦٠^\circ$ حيث أن عدد

الدورات يساوي ٤ والإشارة سالب تدل على أن اتجاه الدوران مع عقارب الساعة.

تمارين عامة على العمليات في الصورة القطبية

تمرين (١) إذا كان $z = 1 + i$ ، $[z^2, \sqrt{2}] = [60^\circ, 2]$

أوجد بالصورة القطبية $[r, \theta]$ كلا من:

$$(1) z \cdot z \quad (2) \frac{z}{z} \quad (3) \bar{z} \quad (4) z - z \quad (5) (z) \cdot (z)$$

الحل

نلاحظ أنه يمكن إجراء جميع العمليات في الصورة القطبية وبالتالي سنحول z إلى الصورة القطبية

$\because z = 1 + i \quad \therefore |z| = |1 + i| = \sqrt{2} \quad \text{بإجراء تحويل سريع للعدد } z \text{ إلى الصورة القطبية يكون:}$

$\therefore z = \sqrt{2} [45^\circ, 2] \leftarrow \text{في الربع الأول} \leftarrow [45^\circ, \sqrt{2}] = z$

$$(1) z \cdot z = [\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}, 45^\circ + 45^\circ] = [2, 90^\circ] = [2, 0^\circ]$$

$$= [2, 0^\circ] = [2, 0^\circ]$$

$$(2) \frac{z}{z} = \frac{[\sqrt{2}, 45^\circ]}{[\sqrt{2}, 45^\circ]} = [1, 0^\circ] = [1, 0^\circ]$$

$$(3) \bar{z} = [\sqrt{2}, -45^\circ]$$

$$(4) z - z = [\sqrt{2}, 45^\circ] - [\sqrt{2}, 45^\circ] = [0, 0^\circ]$$

$$(5) (z) \cdot (z) = [\sqrt{2}, 45^\circ] \cdot [\sqrt{2}, 45^\circ] = [2, 90^\circ] = [2, 0^\circ]$$

$$= [2, 0^\circ] = [2, 0^\circ]$$

تمرين (٢) إذا علمت أن $z = 2 + i$ أوجد بالصورة القطبية $[r, \theta]$ كلا من:

$$(1) \bar{z} \quad (2) z - z \quad (3) \frac{1}{z} \quad (4) \frac{1}{z} \quad (5) \frac{z^3}{z}$$

الحل

$$(1) \bar{z} = [2, -\theta] = [2, -\arctan(1/2)] = [2, -26.565^\circ]$$

$$(2) z - z = [2, \arctan(1/2)] - [2, \arctan(1/2)] = [0, 0^\circ]$$

$$(3) \frac{1}{z} = \frac{1}{[2, \arctan(1/2)]} = [\frac{1}{2}, -\arctan(1/2)] = [\frac{1}{2}, -26.565^\circ]$$

$$(4) \frac{1}{z} = [\frac{1}{2}, -\arctan(1/2)] = [\frac{1}{2}, -26.565^\circ]$$

$$(5) \frac{z^3}{z} = \frac{[2, \arctan(1/2)]^3}{[2, \arctan(1/2)]} = [2^2, 2 \cdot \arctan(1/2)] = [4, 53.13^\circ]$$

ملخص لبعض خواص الصورة القطبية

أوجد المقياس والزاوية لكل من المثلثات التالية

مثال

$$(1) \quad 3 = \epsilon \quad (60^\circ \text{ جتا} + 60^\circ \text{ ت جتا})$$

~~الحل~~

المقياس = 3 الزاوية = 60°

إذا كان :

$1\epsilon = [1, \text{هـ}]$ ، $2\epsilon = [2, \text{هـ}]$
عدين مركبين ، أ عدد حقيقي فان:

$$① \quad 1\epsilon + 2\epsilon = [1 + 2, \text{هـ}]$$

$$② \quad 1\epsilon \div 2\epsilon = [1 \div 2, \text{هـ}]$$

$$③ \quad 1\epsilon = [1, \text{أ}]$$

$$④ \quad 1\epsilon - 2\epsilon = [1 - 2, \text{هـ}]$$

$$⑤ \quad 1\epsilon = \left[\frac{1}{1}, \text{هـ} \right]$$

$$⑥ \quad 1\epsilon = [1, \text{هـ}]$$

$$(2) \quad 5 = \epsilon \quad (60^\circ \text{ جتا} - 60^\circ \text{ ت جتا})$$

~~الحل~~

يجب تعديل الزاوية

$$\epsilon = 5 \quad (300^\circ \text{ جتا} + 300^\circ \text{ ت جتا})$$

المقياس = 5 الزاوية = 300°

اكتب العدد : $\epsilon = 2 - 2$
بالصورة القطبية ، ثم مثله
علي شكل ارقاندا؟

مثال

$$(6) \quad 7 = \epsilon \quad (60^\circ \text{ جتا} - 60^\circ \text{ ت جتا})$$

~~الحل~~

$$\epsilon = 7 \quad (330^\circ \text{ جتا} + 330^\circ \text{ ت جتا})$$

المقياس = 7 الزاوية = 330°

$$(5) \quad 2 = \epsilon \quad (60^\circ \text{ جتا} + 60^\circ \text{ ت جتا})$$

~~الحل~~

يجب تعديل الزاوية

$$2 \quad (30^\circ \text{ جتا} + 30^\circ \text{ ت جتا})$$

المقياس = 2 الزاوية = 30°

مثال

ضع العدد المركب
 $E = [10, 330]$
في الصورة الديكارتية

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال

إذا كان : $E = 2\sqrt{3} + 2i$
اكتب كل من الاعداد الاتية في
الصورة القطبية:

① ع

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

② ع

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

② ع $\frac{1}{E}$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ضع علامة (✓) امام العبارة الصحيحة وعلامة (x) امام العبارة الخاطي:

- (١) للعدد المركب ونظيره الجمعي نفس السعة ()
- (٢) مقياس النظير الجمعي للعدد المركب $E = [٥, ٧٠]^\circ$ يساوي ٥ ()
- (٣) العددان المركبان $[٢, ١٢٠]^\circ$ ، $[٢, ٨٤٠]^\circ$ متساويان ()
- (٤) $|\overline{E}| = |E^{-1}|$ ()
- (٥) العدد المركب $[٦, ٣٠٠]^\circ$ هو مرافق العدد المركب $[٦, ٦٠]^\circ$ ()
- (٦) إذا كان $E = [٢, ٧٠]^\circ$ فإن $|E^{-1}| = ٢$ ()
- (٧) إذا كان $E = [٢, ٣٠]^\circ$ فإن سعة $\overline{E} = \pi$ ()
- (٨) إذا كانت سعة $E = ٣ - ٤$ تساوي هـ فإن سعة $٢ - E = ٩٠^\circ$ ()
- (٩) إذا كان $E = ر$ (جتا هـ) $+ ت$ (جا هـ) $= \pi$ فإن سعة $-\pi + هـ$ ()
- (١٠) إذا كان $E = [٢, ٣٠]^\circ$ فإن $|E^{-1}| = ١$ ()
- (١١) إذا كان $E = [٢, ٣٠]^\circ$ فإن $|E \div E^{-1}| = ١$ ()
- (١٢) إذا كان $E = ر$ (جا هـ $+ ت$ جتا هـ) فإن سعة $E = ٩٠^\circ$ ()
- (١٣) إذا كان $E = [٢, ٣٠]^\circ$ فإن سعة $\overline{E} = هـ$ ()
- (١٤) إذا كان $|E^٣| = ١٥$ فإن $|E| = ٤٥$ ()
- (١٥) إذا كان $|E \cdot E^{-٢}| = ٢٤$ وكان $|E^٢| = ٦$ فإن $|E| = ٤$ ()
- (١٦) إذا كان $E = [٢, ٣٠]^\circ$ ، $ت = E = [٢, ١٤٠]^\circ$ فإن $هـ = ٦٠^\circ$ ()
- (١٧) إذا كان $١, ع = س + ت$ ، $٢, ع = ص + ت$ فإن $|١, ع| = |٢, ع|$ ()
- (١٨) إذا كان $٢ ع = \overline{٥٠} = ر$ فإن قيمة $٥ = ر$ ()
- (١٩) إذا كان $E = \frac{ب + ب}{ب - ب}$ فإن سعة $E = ٩٠^\circ$ ()
- (٢٠) إذا كان $١, ع = ب + ت$ ، $٢, ع = ب + ت$ فإن $١, هـ = ٢, هـ$ ()
- (٢١) مربع العدد المركب $[٢, \pi] = ٤$ ()
- (٢٢) إذا كان $E = [٣, ٦٠]^\circ$ ، وكان $E = [٣, ٣٠]^\circ$ فإن قيمة $هـ = ٣٠^\circ$ ()